צמוד עצמי: לכל

* אם A-אינווריאנטי ⇦ גם A-אינווריאנטי
* כל ע"ע של A הם ממשיים
* אם A-אינווריאנטי אזי גם צ"ע

# משפט

יהי צ"ע. קיים בסיס אינ' שבו A הוא אלכסוני

(כל אופרטור צ"ע ניתן ללכסון בבסיס א"נ ⬄ לכל אופ. צ"ע קיים בסיס עצמי א"נ.)

## הוכחה(מעל )

צ"ע. לכל אופרטור קיים ע"ע ווקטור עצמי . הוא תת מרחב אינווריאנטי. אזי גם תת מרחב אינווריאנטי, ו גם צ"ע.

באינדוקציה נקבל קיום של , , , , ואז בבסיס א"נ לA יש מטריצה

## הערה(בלי אינדוקציה)

*, , , ,   
לA יש ע"ע עם וו"ע ,   
 ו  
 בתוך*

*כדי שזה יעבוד גם על צריך Complexification – מעבר ממרחב מעל מרחב מעל*

## תוצאה(של ההוכחה מעל )

כל מטריצה הרמיטית ניתנת ללכסון בבסיס א"נ ב

## הוכחה מעל

יהי , (סימטרית ממשית ⇦ הרמיטית). אזי קיים בסיס א"מ עצמי לA.

נתבונן ב. A הוא אופרטור צ"ע(⬄ מטריצה הרמיטית ⇦ לA קיים בסיס ב א"נ עצמי: . כל הע"ע הם ממשיים:

נתבונן ב:

* או ש הם ת"ל(⇦ קיים כך ש). זה אומר ש  
  ⇦ ⇦ .  
   אם , ואם אזי
* *או ש בת"ל. קיימים שני ווקטורים , וגם   
   הם צ"ל של :*

## הערה

הוכחנו: אם אזי לA יש תת מרחב אינווארינטי(ב) ממימד 1 או 2.  
(נתבונן ב.לS יש ע"ע לפחות אחד עם ווקטור עצמי לפחות אחד. זה נותן או ווקטור עצמי ממשי(אם ת"ל) או תת מרחב אינווריאנטי )

אם A סימטרית (ובפרט הרמיטית) לA יש לפחות ע"ע אחד שהוא גם ממשי. זה נותן או: ווקטור עצמי אחד ממשי או שני ווקטורים עצמיים ממשיים בת"ל. בשני המקרים נקבל תת מרחב אינווריאנטי ו תת מרחב אינווריאנטי אורטוגונלי. באינדוקציה נקבל בסיס אינווריאנטי עצמי.

## דוגמה

תתי מרחב עצמיים:   
 בגלל שע"ע הם שונים.

1. *. בסיס:   
   Gram-Schmidt: , ,*
2. *.  
   בסיס: ,*

*הערה: הדוגמה היא לא לפי דרך ההוכחה של המשפט. מה שמיוחד בלכסון הזה(בהשוואה ללכסון רגיל) זה שמובטח שהוא עובד ושהבסיס הוא אורטנורמלי.*

מטריצות\אופרטורים אורתוגונליים\אוניטריים

נקראת אורתוגונלית אם (או )  
 נקראת אוניטרית אם: (או )   
אורתוגונלית ממשית ⇦ אוניטרית.

# מטריצות אורת\אוניטריות ובסיס א"נ

# משפט

שורות\עמודות של מטריצה אורתוגונלית\אוניטרית הם בסיס א"נ של \ (ביחס למכפלה הסטנדרטית!) וגם להפך!

# משפט

יהיו P(או U) אורתוגונלית(אוניטרית) ויהי בסיס כך ש: (או ) אזי א"נ

וגם להיפך: אם א"נ אזי אורת\אוניט